**Pontificia Universidad Católica de Chile**
**Facultad de Física**
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

# Ayudantía 21

## Problema 1

Considere un toroide de sección transversal rectangular tal como se ve en la figura 1. El toroide tiene radio interior $a$ y exterior $b$, y tiene $N$ vueltas distribuidas de manera uniforme. Encuentre la autoinductancia del toroide.

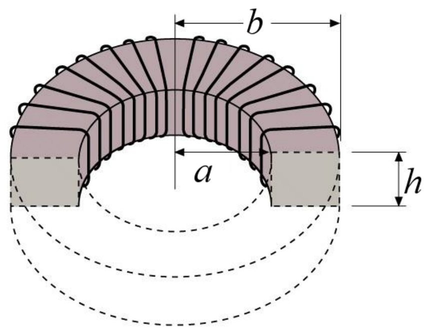


Figura 1:

## Solución

Para calcular la autoinductancia, hay que calcular el flujo sobre el toroide debido al campo producido por el mismo toroide, es decir:

$$M = \frac{\phi_{toroide}}{I_{toroide}} \tag{1}$$

El campo producido por el toroide se puede obtener de la ley de Ampère. Con esto da que el campo para $r < a$ y $r > b$ es 0, y para $a < r < b$ el campo es de la forma $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ debido a la simetría del problema. Aplicando ley de Ampère con un círculo como curva da que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{2}$$

Ahora que tenemos el campo, calculamos el flujo por una de estas espiras cuadradas que forman el toroide, donde cada una de ellas tiene un diferencial de superficie dado por $d\vec{S} = drdz\hat{\phi}$ con $a < r < b$ y $0 < z < h$ ($r$ es la distancia al eje del toroide). Calculando el flujo sobre una espira:

$$\phi_{espira} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^h \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3}$$

Como el toroide tiene $N$ espiras, el flujo total $\phi_T$ en el toroide va a ser $\phi_T = N\phi_{espira}$, lo que nos da que:

$$\phi_T = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4}$$

Finalmente la autoinductancia va a ser:

$$M = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5}$$

## Problema 2

Considere un cilindro infinito de radio $a$ por el que circula una corriente $I_1$ distribuida uniformemente. A una distancia $d$ del eje del cilindro se encuentra una espira cuadrada de lado $L$ por la que circula una corriente $I_2$, tal como de ve en la figura 2. Calcule la inductancia mutua del sistema.

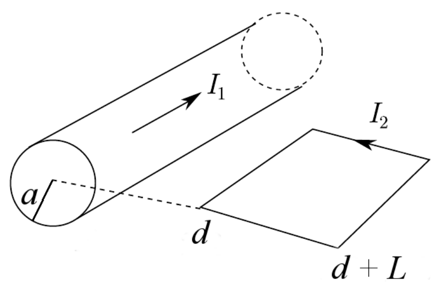


Figura 2: El eje del cilindro coincide con el eje $z$, el eje $y$ se coloca de modo que el borde inferior de la espira quede sobre el eje $y$. El eje $x$ apunta hacia arriba.

## Solución

La inductancia mutua se puede calcular como:

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \tag{6}$$

donde $\phi_{21}$ es el flujo en la espira 2 debido al campo producido por la espira 1. Si tomamos como espira 1 el cilindro y la espira 2 el cuadrado, entonces debemos calcular el flujo sobre el cuadrado debido al cilindro, el cual va a venir dado por:

$$\phi_{21} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \tag{7}$$

El campo producido se puede obtener de la ley de Ampère, el cual es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{8}$$

Si colocamos el sistema de referencia de modo que la espira quede en en el plano $yz$, entonces se tiene que:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}(-\hat{x}) \tag{9}$$

$$d\vec{S}_2 = dydz(-\hat{x}) \tag{10}$$

Por lo tanto el flujo es:

$$\phi_{21} = \int_0^L \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dydz = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L}{d}\right) \tag{11}$$

Finalmente la inductancia va venir dada por:

$$M = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L}{d}\right) \tag{12}$$

## Problema 3

Se tienen 2 espiras circulares paralelas de radios $a$ y $b$ separadas por una distancia $h$, tal como se ve en la figura 3. Si por la espira de radio $b$ circula una corriente $I$, encuentre la inductancia mutua si es que $b \gg a$.

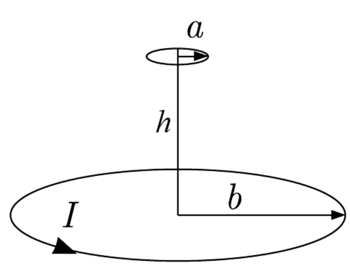


Figura 3:

## Solución

Sea $A$ la espira de radio $a$ y $B$ la espira de radio $b$. Nuevamente la inductancia mutua la podemos calcular como $M = \phi_{21}/I$. En este caso el campo lo genera $B$, y dado que $A$ tiene radio $a \ll b$, entonces podemos decir que el campo sobre $A$ va ser aproximadamente el campo producido por $B$ sobre el eje $z$. Usando Biot-Savart el campo producido por $B$ es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \tag{13}$$

Como $d\vec{l} = bd\phi\hat{\phi}$ con $0 \leq \phi < 2\pi$, $\vec{r} = z\hat{z}$ y $\vec{R} = b\hat{r}$, entonces se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{bd\phi\hat{\phi} \times (z\hat{z} - b\hat{r})}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \tag{14}$$

Dado que $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}$, lo único que depende de $\phi$ es $\hat{r} = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}$, que al integrar entre 0 y $2\pi$ se hace 0, por lo tanto esa parte de la integral no aporta al campo magnético. La otra parte que corresponde a $\hat{\phi} \times \hat{r} = -\hat{z}$ es la que aporta al campo, con lo que se tiene:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b^2 d\phi\hat{z}}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}\hat{z} \tag{15}$$

Ahora que se tiene el campo, se puede calcular el flujo sobre $A$ como:

$$\phi_{21} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{16}$$

Con $d\vec{S} = rdrd\phi\hat{z}$ se tiene que:

$$\phi_{21} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{b^2 d\phi}{(h^2 + b^2)^{3/2}} rdrd\phi = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} \tag{17}$$

Por último la inductancia mutua va a ser:

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} \tag{18}$$

## Problema 4

En el plano $z = 0$ se tienen 2 espiras. La primera es una espira circular de radio $a$ por la que circula una corriente $I$. La segunda es una espira formada por 2 segmentos circulares de radios $l$ y $l + h$, concéntricas a la primera, tal como se ve en la figura 4. Calcule la inductancia mutua en el caso que $l \gg a$. Use lo siguiente:

1. Aproximación dipolar.
2. Potencial vectorial magnético $\vec{A}$.

## Solución

### Notas sobre las ayudas del problema

1. La aproximación dipolar básicamente nos dice que lejos de la zona donde se produce el campo magnético (donde está la espira), el campo magnético va a ser aproximadamente el campo producido por un dipolo magnético.

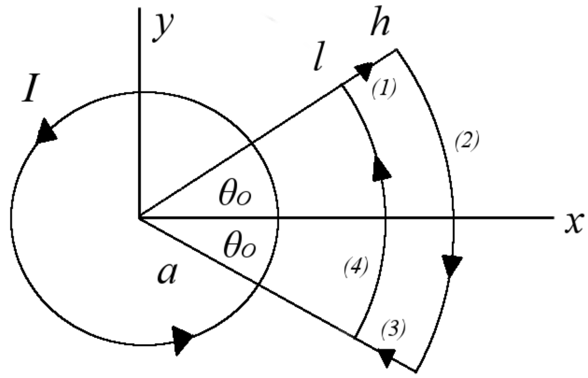


Figura 4:

2. El potencial vectorial magnético es un campo vectorial tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Esto se debe a que como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, entonces si se define $\vec{B}$ a partir de $\vec{A}$ se sigue cumpliendo ya que la divergencia del rotor es 0. Para $\vec{A}$ también se aplica la aproximación dipolar, donde el potencial debido al dipolo viene dado por:

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{19}$$

**Ahora si la solución**

Sea la espira 1 la espira circular de radio $a$ y la espira 2 la otra espira. Para calcular la inductancia debemos obtener el flujo del campo generado por la espira 1 sobre la espira 2, el cual va a venir dado por:

$$\phi = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \tag{20}$$

Si ahora usamos que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, donde $\vec{A}$ es el potencial vectorial magnético. Con esto se tiene que:

$$\phi = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{21}$$

Donde en el último paso ocupamos el teorema de Stokes y $\gamma$ es la curva que encierra la superficie, es decir, la espira 2.

Como se tiene que $l \gg a$, entonces se tiene que la espira 2 se encuentra muy lejos de la espira 1, por lo tanto se puede decir que $\vec{A} \approx \vec{A}_{dip}$, donde $\vec{A}_{dip}$ es el potencial del dipolo magnético dado en (19). En el caso de una espira se tiene que $\vec{m} = IA\hat{n}$, por lo tanto para la espira 1 $\vec{m} = I\pi a^2\hat{z}$. Como $\vec{r} = r\hat{r}$, el potencial vectorial es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^2}\hat{\phi} \tag{22}$$

El diferencial de línea en la espira 2 va a venir dado por:

$$d\vec{l} = \begin{cases} (1) \quad dr\hat{r} & \text{con} \quad l < r < l+h \\ (2) \quad (l+h)d\phi\hat{\phi} & \text{con} \quad \theta_0 > \phi > -\theta_0 \\ (3) \quad dr\hat{r} & \text{con} \quad l+h > r > l \\ (4) \quad ld\phi\hat{\phi} & \text{con} \quad -\theta_0 < \phi < \theta_0 \end{cases}$$

Dado que $\vec{A}$ va en la dirección angular y el diferencial de línea es radial, entonces las partes (1) y (3) no aportan a la integral de línea. Por lo tanto las integrales sobre (2) y (4) son:

$$\int_{(4)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mu_0 I a^2}{4l^2} ld\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \theta_0}{2l} \tag{23}$$

$$\int_{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{\mu_0 I a^2}{4(l+h)^2}(l+h)d\phi = -\frac{\mu_0 I a^2 \theta_0}{2(l+h)} \tag{24}$$

El flujo finalmente es:

$$\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \theta_0}{2l} - \frac{\mu_0 I a^2 \theta_0}{2(l+h)} = \frac{\mu_0 I a^2 h \theta_0}{2l(l+h)} \tag{25}$$

Finalmente la inductancia $M = \phi/I$ va a venir dada por:

$$M = \frac{\mu_0 a^2 h \theta_0}{2l(l+h)} \tag{26}$$

**Nota final**

El campo magnético producido por un dipolo magnético viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) \tag{27}$$

Como se puede ver hacer la integral de superficie de este campo magnético es mucho mas feo que hacer la integral de línea del potencial vectorial magnético.